EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

53e jaargang
1977/1978
no 10
juni/juli

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. W. E. de Jong - W. Kleijne - Drs. D. P. M. Krins - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, 2243 CD Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 35,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden, die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 21,—; contributie zonder Euclides *f* 15,—.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij Drs. G. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9II, 1078 JX Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1 1/2.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, 2242 CD Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, 4849 BD Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 32,–. Een kollectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement *f* 18,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerst volgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 5,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

Vakdidaktische notities

FRED GOFFREE

10 Het didaktiek eksamen

Het onderwijzen van het vak wiskunde op scholen voor voortgezet onderwijs vereist naast wiskundige ook didaktische inzichten en bekwaamheden. Dat weten velen al heel lang. Het is evenwel nog niet zo lang geleden dat men bij de studie voor een van de akten – voor de bevoegdheid in het geven van onderwijs in de wiskunde – ook de didaktiek in beschouwing ging nemen. Door dit onderdeel in het eksamenprogramma op te nemen worden de aanstaande leraren ook (extrinsiek) gemotiveerd om de didaktische doordenking van de schoolwiskunde serieus te nemen. De mogelijkheden om het wiskundeonderwijs te observeren, te analyseren en te ervaren zijn beperkt. De kandidaten met onderwijservaring zijn in het voordeel, als ze tenminste hun theoretische informatie in de eigen praktische situatie weten te toetsen. Maar ook niet – (of nog niet) schoolmeesters hebben recht op een faire kans om het didaktiek eksamen met goed gevolg – voor zichzelf en voor hun aanstaande leerlingen – af te leggen.
Vanmiddag had ik het genoegen om met een kandidaat uit de laatstgenoemde kategorie op het didaktiek-eksamen (M.O.-A) van gedachten te wisselen. Ik wil graag met deze notitie a.s. kollega's op (andere) gedachten brengen.
Bij elk eksamen behoort een werkstuk. Te uwer informatie noem ik een paar onderwerpen die gekozen werden: Negatieve getallen, differentiatie, de Middenschool, de stelling van Pythagoras, een foutenanalyse, diagnostische toetsen, Mastery Learning, problemen betreffende de nieuwe lerarenopleiding, enkele facetten van mijn werk op de Pedagogische Akademie.

Dit laatste onderwerp brengt me op het idee om hier enige onderwerpen te noemen, die ik nog nooit ben tegengekomen: Een reflektie op mijn eigen wiskundige aktiviteiten, (mijn) wiskunde leren als proces, leren mathematiseren in de brugklas, hoe ik de kunst van het uitleggen beoefende, relevante wiskunde in algemene konteksten, hoe ik een begrip leerde via één voorbeeld, analyse van goede oplossingen, aspekten van een mathematisch didaktische instelling, wat ik leerde van mijn bijles-leerlingen . . .

De kandidaat van vanmiddag had een bijzonder origineel werkstuk, getiteld: 'enkele aantekeningen bij een sollicitatie'. Hierin beschrijft hij de gang van zaken rond een – overigens mislukte – sollicitatie als leraar aan een MAVO. De volgende punten komen achtereenvolgens aan de orde:

1 reden van de sollicitatie
2 de gang van zaken
3 de school
4 een ochtend op bezoek
5 voorbereiding en doel
6 praktijk
7 bespreking van de proeflessen
8 konklusie

Vanzelfsprekend is zo'n sollicitatie, zeker voor iemand buiten het onderwijs met belangstelling voor en ervaring in het jeugdwerk, een korte maar hevige inspanning. De motivatie om tot goed onderwijs te komen moet zeer groot zijn, de didaktiek is er een 'op de vierkante meter'. In dit geval moest ze gericht worden op twee lessen:

- inleiding op relaties (klas 2)
- inleiding in de statistiek (klas 3)

Onze sollicitant gaat niet over één nacht ijs. Via gesprekken met enkele bestuursleden krijgt hij een globale indruk van de school. Deze betreft o.a. de betrokkenheid van de leraren, het milieu van de leerlingen, de plaats van het vak wiskunde en het oordeel van de leraren over het nivo van de leerlingen. De opmerking van een kollega: 'denk maar niet dat je veel wiskunde aan ze kwijt kunt' zit hem niet lekker.

Dan gaat hij dichterbij het onderwijs zelf zitten. Hij mag beide wiskundekollega's gadeslaan bij het lesgeven. En hij ziet duidelijk verschil tussen degeen die uit 'interesse voor de wiskunde' onderwijst en de ander die het in de eerste plaats boeiend vindt om met kinderen om te gaan. De sfeer in de klas voelt hij goed aan. Dat onze kandidaat (nog) niet beschikt over de mogelijkheden om de lessen naar inhoud, verloop en vorm te beschrijven, kan ik hem niet kwalijk nemen.

Na deze 'warming-up' moet hij zelf in aktie komen. Onbewust van een onderscheiding tussen de drie fasen

- voorbereiding
- uitvoering
- reflektie

ervaart hij daarbij enkele specifieke moeilijkheden op elk van deze terreinen. Ik geef u zijn eigen – korte – notities hierover:

'er was mij gevraagd, de volgende lesstof te behandelen:

- in klas 2 een eerste kennismaking met het begrip 'relatie';
- in klas 3 een inleiding over de statistiek.

Beide onderwerpen waren afkomstig uit deel 3 van de serie.
Vandaar dat ik, om een indruk te hebben van de stof die daarvoor behandeld was, ook deel 1 en deel 2 doorgenomen heb, waarbij mij de vorengenoemde punten opvielen.

Voor de les in klas 2 stelde ik mij het volgende *doel*:

- uitgaande van een eigen gemaakt voorbeeld een korte herhaling geven van de begrippen 'verzameling' en 'element';

- nagaan of er een verband bestaat tussen de verzameling uit het voorbeeld en een tweede verzameling;
- noemen van de begrippen 'pijlendiagram' en 'elementenparen';
- nalopen van een voorbeeld uit het boek;
- maken van een aantal sommen (ieder voor zich);
- ingaan op vragen daarover;
- kort noemen van de definitie van het begrip 'relatie'.

Dat wilde ik zoveel mogelijk bereiken door een *vraag- en antwoordspel,* hetgeen mogelijk was, omdat de nieuwe begrippen werden afgeleid uit reeds bekende begrippen. Voor de les in klas 3 was dit laatste niet het geval. Vandaar dat ik er de voorkeur aan gaf, *om in een kort verhaal,* aan de hand van wat voorbeelden, een overzicht te geven van de begrippen 'beelddiagram', 'lijndiagram', 'staafdiagram' en 'histogram'. (Deze begrippen worden in het boek allemaal in het eerste hoofdstuk genoemd. Hierbij hield ik er rekening mee, dat ik zelf in enkele volgende lessen op ieder begrip afzonderlijk nog eens in zou willen gaan.) Wanneer er nog tijd over was, wilde ik de leerlingen nog een sommetje over een beelddiagram laten maken.
Het lesgeven zelf leverde weinig moeilijkheden op. *Orde* houden was nauwelijks nodig, aangezien een wiskundeleraar en de direkteur van de school tijdens de les aanwezig waren. Het gevolg was, dat ik in beide gevallen het voorgenomen programma kon afwerken. Ik vind de situatie tijdens zo'n proefles eerlijk gezegd *niet zo* reëel: zowel de leerlingen als degene die les moet geven, reageren anders dan ze normaal zouden doen.'

Ik zei het u al, de sollicitatie had voor deze kollega geen goed gevolg. Een ander had meer ervaring en meer akten. Toch is het hiermee niet afgelopen. Aan de direkteur, die bij de proeflessen aanwezig was, wordt verzocht ze nog eens te bespreken om, zoals hij zelf uitdrukt: 'er tenminste nog iets van te leren'.
De volgende punten van kritiek worden daarin naar voren gebracht:
- *niet* te veel stof behandelen;
- *niet* te veel voorbeelden door elkaar gebruiken;
- *niet* te snel definities invoeren;
- vragen *zo stellen,* dat iedereen moet nadenken;
- wanneer op een vraag teveel antwoorden komen, dan de vraag toespitsen;
- de vraag 'begrijpen jullie dat?' *niet* stellen, in plaats daarvan toetsen m.b.v. vragen;
- *meer* aandacht besteden aan de orde in de klas;
- *meer* gebruik maken van de mogelijkheden, die de stem biedt (zachter en harder spreken, variatie in toonhoogte).

In de 'konklusie' verzucht arme kandidaat: 'kan ik het "leraar zijn" leren, of is het een gave, die de een wel en de ander niet heeft?'
Tot zover dit originele werkstuk; het eksamen zou nu kunnen beginnen.

* * *

Laat ik eerst zeggen wat naar mijn mening in dit werkstuk ontbreekt. De didaktische diskussie, de gedachtenwisseling over wiskunde leren en wiskunde onderwijzen had op hoger nivo kunnen plaatsvinden als we de beschikking hadden gehad over

- een gedetailleerd protokol van de twee proeflessen;
- een reflektie op de eigen inbreng in deze lessen;
- een nadere doordenking van de didaktische aangrijpingspunten, die o.a. in de nabespreking naar voren kwamen.

Met een dergelijke didaktische doordenking van het geheel hadden de gespreks-punten nóg beter uit de verf kunnen komen.
Ik wil deze notitie besluiten met het opsommen ervan:

- de vraag naar '*de oriënteringsbasis*' van leerlingen in verband met het begrip relaties kan vanuit het gegeven wiskundeboek beantwoord worden. Hoe zat dat met de statistiek-les?
- richt je je wiskundeonderwijs '*probleemgeoriënteerd*' in of kies je voor het geven van informatie over feiten en te volgen werkwijzen?
- ken je je *eigen instelling* t.o.v. wiskunde leren en onderwijzen? Speelt deze een rol bij de keuze van (bijvoorbeeld) 'Moderne Wiskunde' boven 'Sigma'?
- is *visualiseren* belangrijk bij het bedrijven van wiskunde? Vergelijk eens het visualiseren bij de relaties en bij de statistiek.
- *vragen stellen* is essentieel bij het wiskundeonderwijs. Welke mogelijkheden heb je?
- *uitleggen* of *duidelijk maken* of *duidelijk laten worden*. Een kunst voor wiskundeleraren. Welke mogelijkheden heb je om het aksent meer bij de leerling te leggen?
- de rol van *definities* in de wiskunde. Zijn er soorten, zijn er nivo's, zijn er te onderscheiden leerprocessen in verband hiermee? Geef voorbeelden.
- het *begrip* relatie. Rol binnen de schoolwiskunde, benadering vanuit ideeën over begrippen leren.
- wiskunde als *menselijke aktiviteit* of als . . .

U ziet het, we hebben ons beperkt tot de voorbereidingsfase. Ongehinderd door de zorg voor het handhaven van de orde kan men op deze punten zwaar didaktisch werk verzetten. Er valt wat dat betreft in elk geval nog heel wat te leren.

Euclides

Maandblad voor de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse
Vereniging van Wiskundeleraren

53ste jaargang 1977/1978

Wolters-Noordhoff bv Groningen

Inhoud van de 53ste jaargang 1977/1978

ARTIKELEN

KORRELS

THEMANUMMERS

VERSLAGEN

BOEKBESPREKINGEN

DIVERSEN

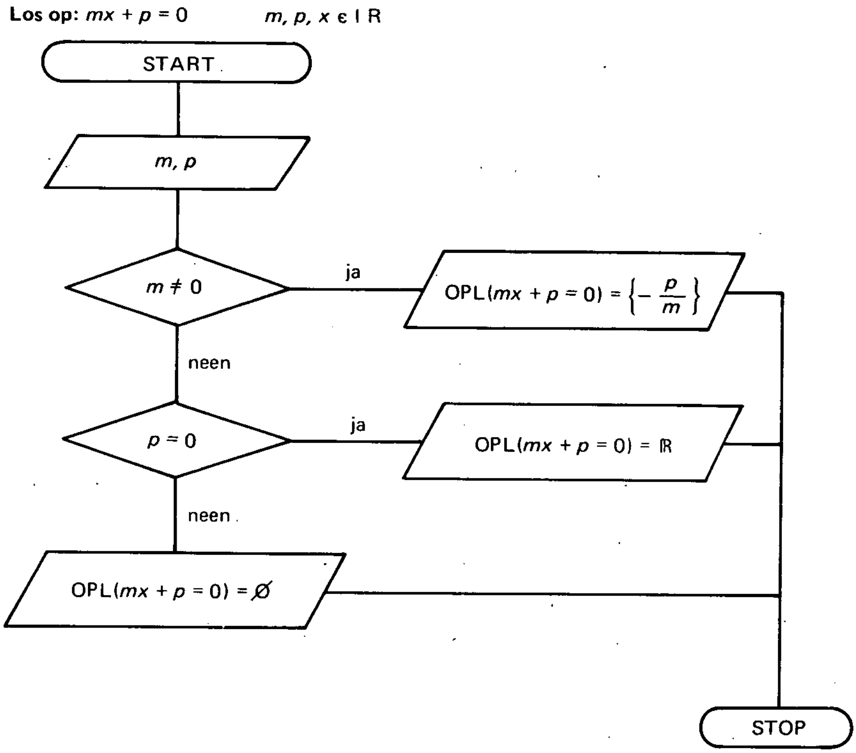
Miniprogrammering in het Middelbaar Onderwijs

FRANK LAFORCE

voordracht gehouden op de Nederlands-Vlaamse Studiedag N.V.v.W. en V.V.W.L. te Breda op 12 maart 1977

Waarom deze titel? Waarom niet programmatie? Wellicht wordt op mijn vinger ge'timmer'd wegens taalverderf!
Programmatie betekent voor elke leraar in het Zuiden (der Nederlanden) iets wat wel met veel berekeningen te maken heeft, maar niets met wiskunde. Het is nl. de verbintenis van de regering om de ambtenaren en leraren een eindejaarsvergoeding, in goed nederlands een gratificatie, uit te betalen. En die is eerder mini.
Zoals bij beheersing het actieve beheersen bedoeld wordt, zo bedoel ik met programmering de actie van het programmeren. Het prefix mini, enkele jaren geleden fel in de mode en naar het schijnt terug in opkomst, slaat hier niet op de (soms al te) kortheid van de programma's, maar eerder op hun eenvoud.
Waar je bij programmeren meestal de schaduw van een computer op je papier ziet vallen, kan dit ook zonder een ingewikkelde programmeertaal, zonder omslachtige afspraken. Het is precies dat wat ik met die mini aanduid. Zoals een mini bij een stel fraaie, slanke benen een rein en zuiver esthetisch genot oproept, kan een mini-programmering in de wiskunde tot fraaie en zeer bevredigende resultaten leiden. Maar evenmin als een mini past bij een door elefantiasmus gekwelde dame, past oversimplificatie bij een ingewikkeld probleem. In de kennis van de beperktheid ligt de kracht.
Een mooie titel dekt soms een zeer gediversieerde lading. Zo ook de titel van mijn spreekbeurt. Ik zal het voorvoegsel mini maar laten vallen, al is dat steeds op de achtergrond daar, om niet van een mini-obsessie verdacht te worden.
Programmeren doen we in feite heel ons leven, tenminste als we een goed resultaat van onze inspanning betrachten. In goed nederlands heet dat overleg. Het is dwaas hoog boven op een ladder te gaan timmeren, als de hamer nog in de gereedschapskist ligt. Of als we een heerlijk stuk vlees gaan braden, te ontdekken dat de boter al bruin is en we de ui nog moeten versnipperen. Mijn opdracht is eigenlijk over de zakrekenmachientjes, al of niet programmeerbaar, te spreken. Maar een goed gebruik van die dingen veronderstelt een volgorde van toetsen indrukken. Naar analogie met betasten, zou ik hier het woord betoetsen of liever intoetsen willen invoeren.
Een volgorde bepalen is al programmeren in de meest simplistische vorm. Programma-schema's of blokschema's zijn niets anders dan het grafisch weergeven van een volgorde. Ik zou aanraden de leerlingen reeds zeer vroeg met deze blokschema's vertrouwd te maken. Ik geef hier een zeer eenvoudig voorbeeld.

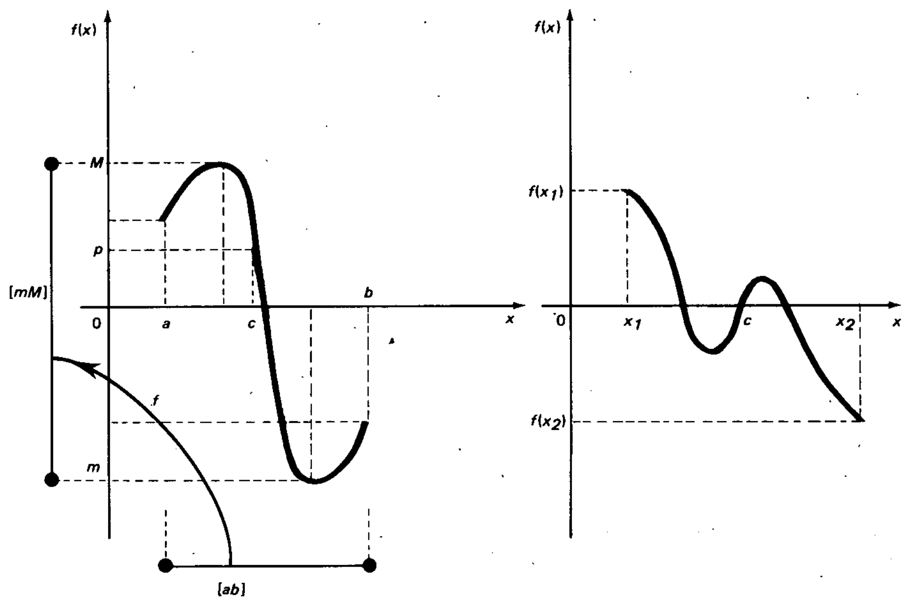
(Het is niet mijn bedoeling vandaag geleerd te doen.)
Los op en bespreek $mx + p = 0, m, p, x \in \mathbb{R}$.



Nu ga ik werkelijk over mijn ervaring met de rekenmachientjes in de klas spreken, maar je zal steeds die blokschema's terug vinden. Ik heb een laatstejaarsklas met het zwaarste programma wiskunde, met negen lesuren per week. Nu wist ik al van mijn collega, die in het jaar lager les geeft, dat ze alle twaalf over een zg. wetenschappelijke zakcalculator beschikten. Er waren verschillende merken, meestal met algebraïsche notatie, maar ook met de reversed polish notation (RPL). Steeds met de functies sin, cos, tan, e^x, 10^x en hun inversen en y^x. Tevens omzetting van graden in radialen en vice-versa. De meeste gaven acht cijfers in het register. Ik besloot daar een goed gebruik van te maken. Alle gezoek en interpolatie in goniometrische en logaritmentafels werd verbannen.
Eerst kwam het verloop van functies aan bod. Ik heb de indruk dat in Vlaanderen daar wel meer tijd en aandacht aan besteed wordt dan in Nederland. Deze indruk zag ik bevestigd in de eindexamenvragen en in enkele leerboeken over Analyse in het V.W.O. Vergis ik me, dan mag je me straks bij het vragenkwartiertje op de rooster leggen.
Er zijn collega's die zaniken over de graad van nauwkeurigheid. Wel, als ik bv. vind: $f(2) = 2{,}346\ldots$, dan kan ik op mijn roosterblad (millimeterpapier) het punt met niet meer nauwkeurigheid dan een $\frac{1}{2}$ mm aantekenen. Dus heb ik er lak aan of het zesde of zevende cijfer nog wel juist is.

Dat we nu veel meer functiewaarden berekenden dan vroeger spreekt vanzelf. Geef elke leerling een of twee punten te berekenen. Nu konden we ook vlugger en vooral gemakkelijker de nulpunten van een grafiek en de snijpunten van krommen vinden.
De leerlingen kennen de stelling van Weierstrass:

als f: $[ab] \to \mathbb{R}$ continu is, dan is $f([ab])$ gesloten.
Zij $\sup f([ab]) = M$, $\inf f([ab]) = m$
Dan is $f([ab]) = [mM]$ d.w.z.
$\forall p \in [mM]\ \exists c,\ c \in [ab]$ en $f(c) = p$

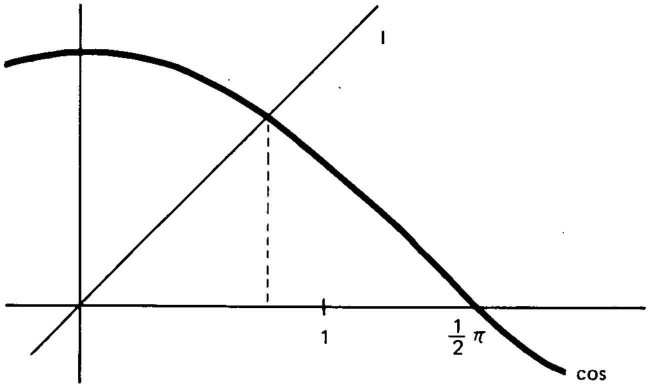


Zijn nu $x_1, x_2 \in [ab]$ zo dat $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, dan $\exists c,\ c \in]x_1 x_2[$ en $f(c) = 0$

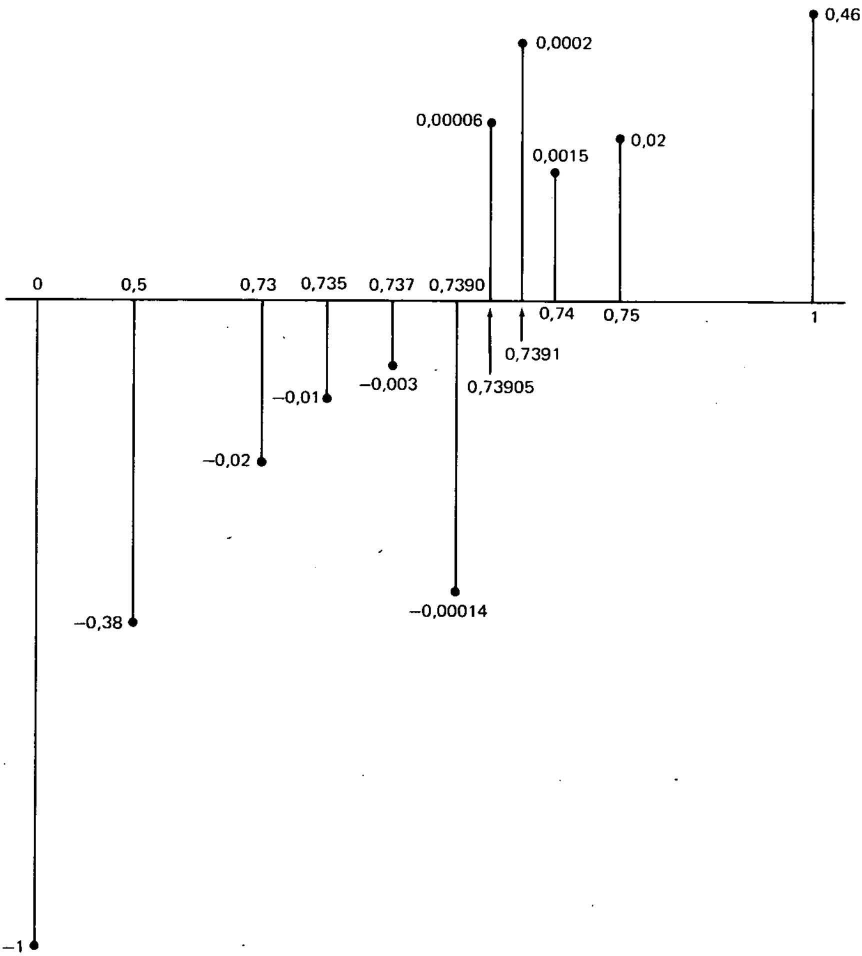
We maken er dankbaar gebruik van, om nulpunten te bepalen. Het is niet helemaal de benaderingsmethode van Newton, maar die vraagt teveel gereken. Theoretisch werkt het vlugger, maar wat zijn enkele berekeningen meer of minder op de zakcomputer i.p.v. het zoeken van nulpunten met raaklijnen en koorden.

Voorbeeld: $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} : x \to x - \cos x$
$\exists ?\, x \in \mathbb{R} : x - \cos x = 0$ of $\exists ?\, x \in \mathbb{R} : x = \cos x$

We zien onmiddellijk dat de enige oplossing ligt tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$.



functiewaarden van: $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} : x \to x - \cos x$,



Tweede voorbeeld en toepassing: De limieten.

$$\lim_{x \gtrsim 0} (\sin x)^x = \lim_{x \gtrsim 0} e^{x \ln \sin x} = e^{\lim\limits_{x \gtrsim 0} (x \ln \sin x)}$$

De exponent geeft $0 \times (-\infty)$.
We vermoeden een limiet en gaan dit uittesten.

$f(x) = (\sin x)^x$
$f(0{,}1) = 0{,}794196$
$f(0{,}01) = 0{,}954992$
$f(0{,}001) = 0{,}993116$
$f(10^{-4}) = 0{,}999079$
$f(10^{-5}) = 0{,}999885$
$f(10^{-6}) = 0{,}999986$ enz.

Vermoeden: de limiet is 1.
Bewijs (met l'Hôpital):

$$\lim_{x \gtrsim 0} (x \ln \sin x) = \lim_{x \gtrsim 0} \frac{\ln \sin x}{1/x} = \lim_{x \gtrsim 0} \frac{\cos x/\sin x}{-1/x^2} = \lim_{x \gtrsim 0} \frac{-x^2 \cos x}{\sin x} =$$

$$\lim_{x \gtrsim 0} \frac{-2x \cos x + x^2 \sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \gtrsim 0} (\sin x)^x = e^0 = 1$$

Te veel ijver schaadt ook.
Prompt kreeg een leerling de duivelse ingeving voor diezelfde waarden de functiewaarde te berekenen van $x^{\sin x}$ en vond met dezelfde benadering dezelfde uitkomsten. Grote verwondering in de klas. Bij controle was er voor 0,01 een verschil van 1×10^{-6}. Voor 0,1 was er een verschil vanaf de vierde decimaal. Zonder zakcalculator zou geen leerling zo iets ooit in zijn hoofd gehaald hebben. Wat ik ook zeer belangrijk vind is dat de leerlingen nu de functie sin echt als een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ zien, zonder dat hoeken de situatie vertroebelen.
Na lang aarzelen, en gezien de sterke prijsdaling nog te vroeg, heb ik ook een zakcomputer gekocht. Indachtig de spreuk: Wie over de hond kan, moet ook over de staart kunnen, was het meteen een programmeerbare, nl. een HP25. De leerlingen vonden het wel interessant. Ze hadden gauw in de gaten dat voor een losstaande berekening ik het niet beter of vlugger kon dan zij (eerlijk gezegd waren ze vlugger), maar dat bij zo'n reeks functiewaarden ik maar eenmaal werk had, en uiteindelijk zeer vlug hun resultaten controleren kon.
Dit intrigeerde hen en op een vrij ogenblik heb ik hun de werking uitgelegd. Zij stelden mij dan wel eens een programma voor. Uiteindelijk moesten zij zelf programmeren en drukte ik of een van hen de toetsen in die de klas opgaf. Het

apparaatje had evengoed (beter) door de school kunnen beschikbaar gesteld zijn. Al gauw hadden ze in de gaten dat je best eerst een programma op papier zet en dan het pas mag intoetsen. En dan zitten we weer gezellig bij de blokschema's en duikt mini op.
Ik zal dan nu enkele programmaatjes door en met hen opgesteld voorleggen. Onthouden we even dat we 8 registers hebben waarin we een getal kunnen opbergen bv. sto 2. Stoppen we een ander getal in datzelfde register dan verdwijnt het eerste getal. We kunnen echter ook in dat register optellen sto + 2, aftrekken sto −2, vermenigvuldigen sto ×2 en delen sto ÷2.
Willen we dat getal oproepen, RCL 2, dan komt het in het werkregister maar blijft toch in register 2 gestockeerd.

Werkwijze HP25.

zit in 1	write	opdracht	nu in 1	draag over in X reg.: RCL 1	blijft in 1
5	7	sto 1	7	7	7
5	7	sto + 1	12	12	12
5	7	sto −1	−2	−2	−2
5	7	sto × 1	35	35	35
5	7	sto ÷ 1	0,7142...	0,7142...	0,7142...

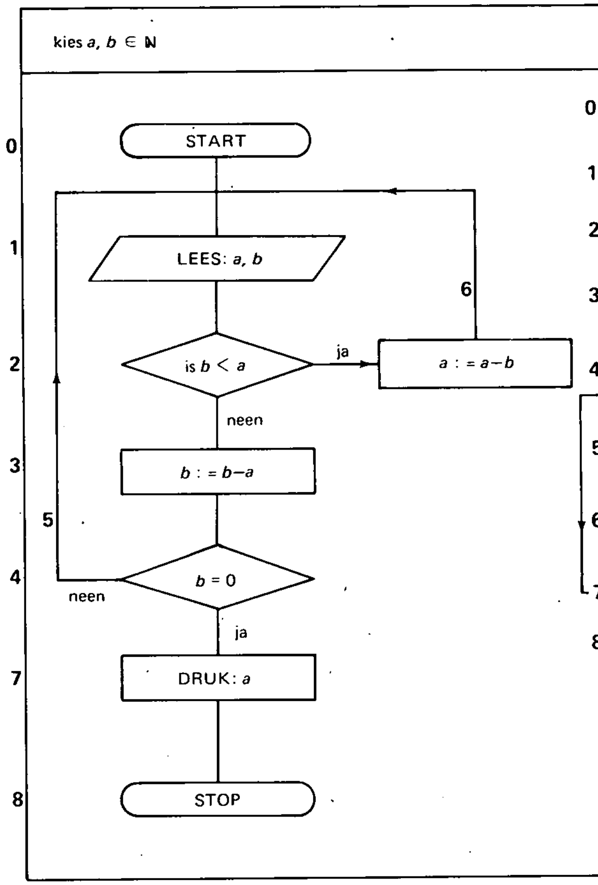
er zijn 8 opslagregisters: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

werkregisters: X, Y, Z, T
onvoorwaardelijke sprong: gto . . .
voorwaardelijke sprong: als ja dan volgende stap,
neen dan de daarop volgende stap
als voorwaarden kunnen gebruikt worden:

$x < y$	$x < 0$
$x \geqslant y$	$x \geqslant 0$
$x \neq y$	$x \neq 0$
$x = y$	$x = 0$

Bij het lezen van 'Numerieke Wiskunde voor het V.W.O.' door G. A. Vonk, de eminente spreker van deze namiddag, bleef er een programma voor het zoeken van de grootste gemene deler van twee getallen in mijn geheugen opgeslagen. Zonder dus op een echte computer te kunnen steunen probeerden we dit met onze programmeerbare zakcomputer. Mini!

g.g.d. (a, b) = g.g.d. $(a-b, b)$
g.g.d. $(p, p) = p$ $\qquad a, b, p \in \mathbb{Z}$ of $\mathbb{N}$



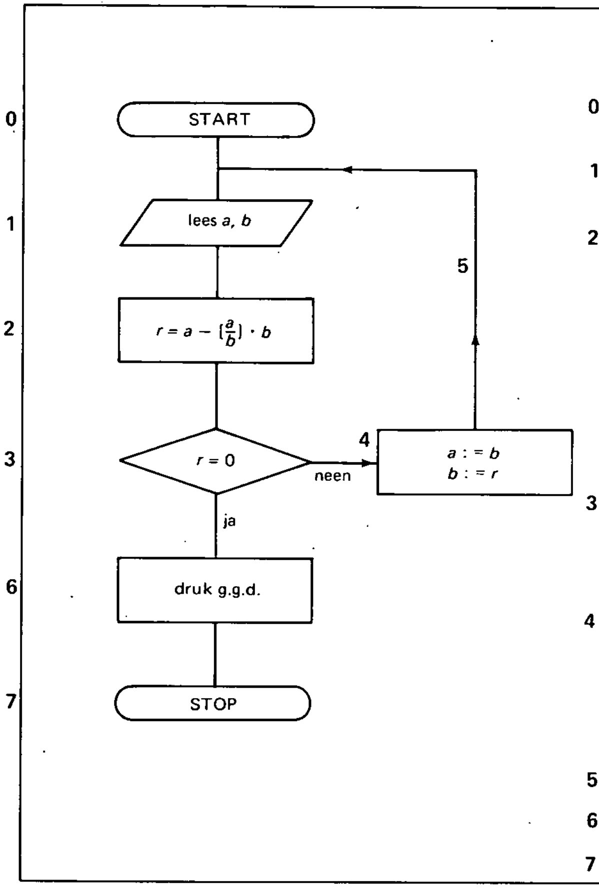
	COMPUTER		
0		a sto 1 b sto 2	
1	01 02	RCL 1 RCL 2	a in Y b in X
2	03 04	f $x < y$ gto (11)	$b<a$ naar stap: ja
3	05 06	RCL 1 sto −2	a : neen $b-a$ in 2
4	07 08 09	RCL 2 g $x = 0$ gto (14)	lees $b-a$ in X $b = 0$: ja
5	10	gto 01	: neen
6	11 12 13	RCL 2 sto −1 gto 01	b $a-b$ in 1 herneem
7	14	RCL 1	de g.g.d.
8	15	gto 00	: stop

Eerste manier: ggd(a, b) = ggd$(a - b, b)$. Vervang het grootste getal door het verschil en behoud het kleinste en ga zo voort tot . . . Eerst ons blokschema en dan vertalen in toetsentaal. Bij een grote a en een kleine b is dit een traag programma.
Veel sneller is de tweede manier.

$$a = bq + r \qquad \text{ggd}(a, b) = \text{ggd}(b, r) \qquad \left[\frac{a}{b}\right] = \text{geheel getal } \frac{a}{b}$$

g.g.d. (a, b) $\quad a = bq + r \quad a, b, q, r \in \mathbb{N}$

St.: g.g.d. (a, b) = g.g.d. (b, r)



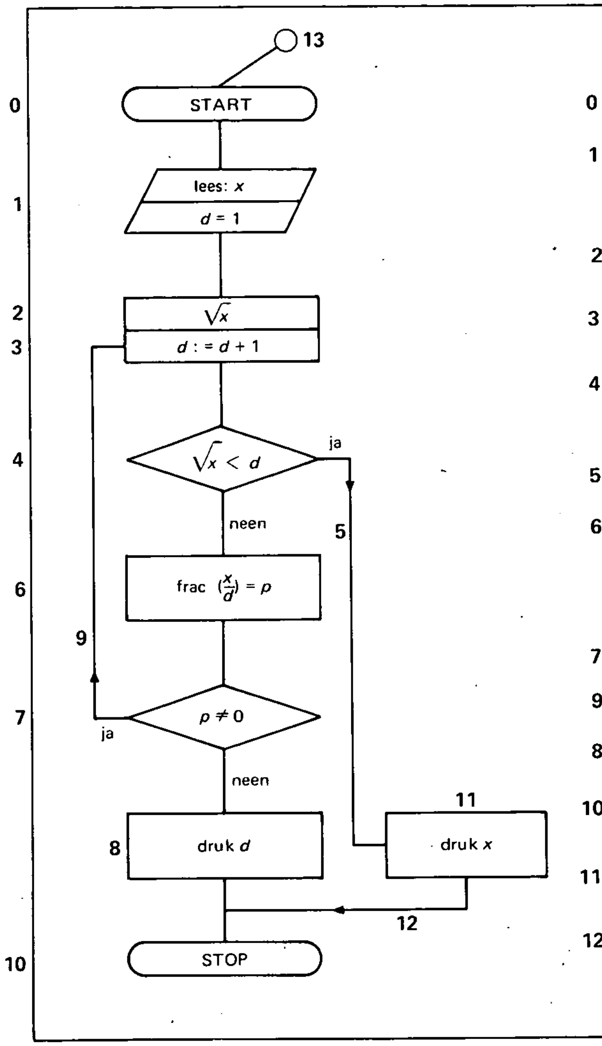
	COMPUTER		
0		*a* sto 1 *b* sto 2	
1	01 02	RCL 1 RCL 2	lees *a* lees *b*
2	03	÷	$\frac{a}{b}$
	04	f int	$[\frac{a}{b}] = q$
	05 06 07 08 09 10	chs sto 3 RCL 2 sto x 3 RCL 1 sto + 3	$-q$ $-q$ in 3 $-bq$ in 3 a $a-bq = r$ in 3
3	11 12 13	RCL 3 g $x = 0$ gto 19	r in X is $r = 0$ ja (b is g.g.d.)
4	14 15 16 17	RCL 2 sto 1 RCL 3 sto 2	neen: lees b b in 1 r nu r in 2
5	18	gto 01	herneem
6	19	RCL 2	lees g.g.d.
7	20	gto 00	stop

Let wel op dat geheel getal x, of geheel getaldeel x of $G(x)$, in het goede Nederlands 'entier van x', bij negatieve getallen niet de definitie volgt. $G(-2{,}3) = -3$, maar de HP 25 geeft -2.
Zoals u ziet heel eenvoudig, heel mini.
Werkt men van in de beginne met blokschema's, later met een wetenschappelijke zakcomputer en dan met een programmeerbare (en er zijn er die veel meer gesofistikeerd zijn dan mijn apparaatje, met programmaschijven, drukkende enz.), dan geeft men de leerlingen zonder dat ze er zich van bewust zijn een goede en grondige vooropleiding en voorbereiding tot de computerleer.

Extra programma opzoeken priemgetallen.

Onderzoek of x, $x \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, priem is.

ja : druk x neen: geef kleinste deler.



	COMPUTER		
0	x	sto 0	x in O
1	01 02 03	1 sto 2 RCL 0	 1 in 2 d x
2	04 05	f $\sqrt{x}$ sto 1	$\sqrt{x}$ $\sqrt{x}$ in 1
3	06 07	1 sto + 2	 $d : d + 1$
4	08 09 10	RCL 2 RCL 1 f $x < y$	d $\sqrt{x}$ is $\sqrt{x} < d$
5	11	gto 20	ja / neen
6	12 13 14 15	RCL 0 RCL 2 ÷ g frac	roep x roep d $\frac{x}{d}$ dec. ged. van $\frac{x}{d} = p$
7	16	g $x \neq 0$	d geen deler
9	17	gto 06	herneem (ja)
8	18	RCL 2	druk eerste deler (neen)
10	19	gto 00	stop
11	20	RCL 0	druk x (priem)
12	21	gto 00	stop

Het was een (mini-)avontuur. Nietsche zei 'Leef gevaarlijk'. Riskeer eens iets dat de dagelijkse sleur doorbreekt. De leerlingen vonden het prettig, sommige kregen weer belangstelling, en voor de leraar was het een verrijking.

Hierna volgt een lijst, uiteraard onvolledig want onbelangrijke berekeningen worden niet vermeld, van de voornaamste situaties waarbij de gewone scientific calculator een belangrijke hulp bood.

03/09/76: Theorie over inverse functies. Opzoeken van verscheidene functiewaarden om ze te tekenen (in het bijzonder arctg).

06/09/76: Functie: $x\sqrt{x^2 + 4x}$. Uitrekenen van buigraaklijn in $-3 - \sqrt{3}$ en $-3 + \sqrt{3}$ (functiewaarde in die punten en richtingscoëfficiënt).
Functie: $x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 20 = y$. Uitrekenen functiewaarden van minimum, maximum en buigpunten (deze laatste in $\frac{4 \pm \sqrt{6}}{2}$).
Functie: $\frac{1}{x^2 + 1} = y$. Buigraaklijn berekend in $\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$.
Functie: $\frac{x^3}{(x + 1)^2} = y$. Functiewaarden opgezocht voor de tekening.
Functie: $x\sqrt{x - 2} = y$. Buigraaklijn berekend ($x = \frac{8}{3}$).

09/09/76: Functie: $2 \sin x - \sin 2x = y$. Opzoeken van de vier buigpunten en buigraaklijnen.

10/09/76: Functie: $x - \cos x = y$. Tasten van het nulpunt door benadering.

13/09/76: Functie: $2x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = y$. Tasten van nulpunten door benadering bij middel van een programma.

14/09/76: Controle op $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cotg^2 x \right) = \frac{2}{3}$ door buurtwaarden.

20/09/76: Benaderend rekenen met de regel van Taylor en Mac Laurin. Tevens berekening van de fout.
$\sqrt[4]{629}$
$\sin x = x$ op 0,00001 na, binnen welke grens?
$\cos x$ bepalen op 0,00001 na met Taylor drie termen in $\frac{\pi}{3}$, binnen welke grens?
$\sqrt[3]{33}$
arctg 0,2

23/09/76: $\sin x$ bepalen met Taylor drie termen in $\frac{\pi}{6}$, binnen welke grens?
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ op 0,00005 na, binnen welke grens?

24/09/76: Benaderen van de differentie d.m.v. de differentiaal.
$\sqrt{103}$; $\sqrt[4]{17}$; $\sqrt[5]{30}$; sin 35°; cos 87°; tg 41°.

18/10/76: Benaderen van ln 2 met Mac Laurin (zonder programma).

22/10/76: Benaderen van e met Mac Laurin (zonder programma).

25/10/76: Controleren of het logaritme nemen van bepaalde getallen, of met bepaalde grondtallen zin heeft door het berekenen ervan.

26/10/76: Verloop van sh, ch en th door opzoeken van verscheidene functiewaarden.

28/10/76: Proef op logaritmische vergelijkingen door de oplossingen in de opgave in te vullen (20 vgl.).

04/11/76: Proef op logaritmische stelsels (7 stelsels).

09/11/76: Proef op logaritmische stelsels en vergelijkingen (9 vgl., 1 stelsel).

18/11/76: Verloop van de functie x^x: limiet in 0 door buurtwaarden, minimum in $\frac{1}{e}$, functiewaarden om de functie te tekenen.

18/11/76: Verloop van de functie sin $x^{\sin x}$. Opzoeken minima, maxima en buigpunten.
Verloop van de functie $x^{\ln x}$, opzoeken verscheidene functiewaarden om ze te tekenen.
Functie: $\ln (5x + 1)$. Functiewaarden.
Functie: $x \ln x = y$. Opzoeken van functiewaarden; limiet in 0 controleren door buurtwaarden; opzoeken van minimum (in $\frac{1}{e}$).

23/11/76: Functie: $x - \frac{2}{x} - 3 \ln x = y$. Berekenen maximum, minimum en buigpunt.
Functie: $\frac{\ln (1 - x)^2}{x} = y$. Opzoeken van functiewaarden voor de tekening. Berekening van het maximum (door tasten).

24/11/76: Functie: $x + e^x = y$. Nulpunt tasten door middel van programma.
Functie: $e^{-x^2 + 10x - 21} = y$. Zoeken van maximum, en verscheidene functiewaarden voor de tekening.

Was het voor mij erg prettig voor u vandaag enkele heel eenvoudige dingen te vertellen, dan hoop ik voor u dat u zich niet verveeld hebt en ik dank u voor uw aandacht en geduld.

Over de auteur:

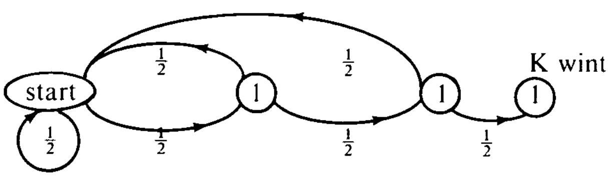
De auteur is voorzitter van de V.V.W.L. Hij is licentiaat wiskunde (R.U.G.) en leraar aan het Sint Norbertuscollege in Antwerpen.

Problemen bij Markov-ketens

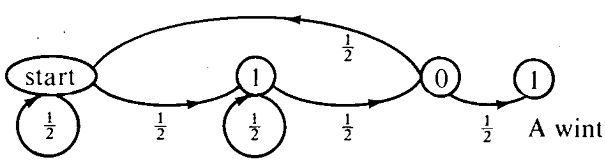
J. DOMPELING

In een 'vakdidaktische notitie' probeert Fred Goffree ten behoeve van onze vraag over het leren van betekenisvolle leerstof zijn ervaring bij zijn aanpak van een probleem zo eerlijk mogelijk weer te geven.[1])
Het aan de orde gestelde probleem luidt als volgt:
'Kaïn en Abel tossen met een eerlijke munt. Kaïn wint als achtereen 111 verschijnen en Abel als achtereen 101 verschijnen. Hoe is de verdeling van de winstkansen?'
Nadat Goffree heeft laten zien dat twee oplossingsmethoden op niets uitlopen, voert hij een tweetal, aan Arthur Engel ontleende, diagrammen ten tonele. Als ook deze derde poging mislukt en een collega, die het probleem zonder enige basiskennis aanpakt, met een oplossing aan komt zetten, besluit hij zijn retrospectie met de opmerking dat gebruikte modellen betekenis moeten hebben op het gevraagde niveau van toepassing, maar dat vooral ook een open benadering van de problemen mogelijk moet blijven.

1 Als aanvulling op de gegeven beschouwing zou ik toch liever wat langer willen blijven stilstaan bij de oplossingsmethode m.b.v. de 'diagrammen van Engel', want in een dergelijke beschouwing mag toch niet een vraag ontbreken als:
'Waarom faalt een – meestal toch suksesvolle – methode?'
Goffree ontwerpt een tweetal diagrammen: één voor de serie 111



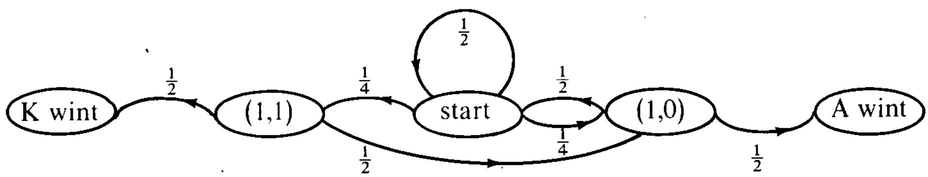
en één voor de serie 101



[1]) Euclides 53 no. 2

Als gevolg van deze splitsing in de gevallen 111 en 101 ontstaat er een ontsporing, want, terwijl de pijl die vanuit het derde hoekje van het eerste diagram niet naar winst voert, naar het derde hokje van het tweede diagram zou moeten wijzen, wijst hij hier naar het begin.

Een suksesvolle aanpak via een Engel-diagram verkrijgt men door in het spel vijf situaties te onderscheiden:
K wint; stand (1,1) (de serie eindigt met twee enen en heeft nog niet tot een beslissing geleid); de beginstand (de serie eindigt op twee nullen en heeft nog niet tot een beslissing geleid); de stand (1,0) (de serie eindigt op 10, zonder dat iemand heeft gewonnen) en A wint.
Het diagram ziet er zo uit:



Stellen we de kansen dat A wint vanuit (1,0) en vanuit de startpositie resp. p en q, dan vinden we m.b.v. bovenstaand diagram het volgende stelsel van twee vergelijkingen in p en q:

$$\begin{cases} q = \dfrac{p}{4} + \dfrac{p}{8} + \dfrac{q}{2} \\ p = \dfrac{1}{2} + \dfrac{q}{2} \end{cases}$$

Hieruit vinden we $q = \frac{3}{5}$, d.w.z.: de kans dat A wint vanuit de startpositie is gelijk aan $\frac{3}{5}$. De kans dat K wint vanuit de startpositie is dan $1 - q = \frac{2}{5}$ (ook analoog te berekenen).

2 Gezien het suksesvan deze oplossingsmethode bij het probleem van Kaïn en Abel, is het de moeite waard de methode uit te proberen op andere, soortgelijke problemen, die voorbeelden zijn van een z.g. absorberend Markov-proces. Prof. Freundenthal bespreekt een stel in zijn boekje 'Waarschijnlijkheid en Statistiek'[2]). Ik licht er het volgende voorbeeld uit:
'Een soort mens-erger-je-niet-spel in sterk vereenvoudigde vorm bestaat uit drie hokjes, 0, 1 en 2; spelers A en B werpen kruis en munt en staan in 't begin in hok 0; wie kruis werpt mag één hok vooruit; wie 2 bereikt, heeft gewonnen; komt één van hen in hok 1, terwijl de ander zich daar bevindt, dan moet die ander terug naar 0; A en B werpen om de beurt. Als A begint wat is dan de kans dat A wint en wat de verwachte spelduur?.'
De gangbare oplossing komt op het volgende neer:
Het spel kent acht toestanden: (0,0,A), (0,1,A), (1,0,A), A wint, (0,0,B), (1,0,B), (0,1,B) en B wint. Zo betekent (0,1,A) dat A aan de beurt is, in 0 staat, terwijl B

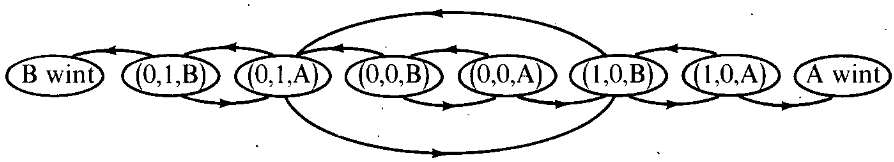
[2]) Uitg. De Erven Bohn 1966

zich in 1 bevindt en (1,0,B) dat B aan de beurt is, in 0 staat, terwijl A in 1 staat. Men stelt de vierkante 8 × 8-matrix M der overgangswaarschijnlijkheden op. Hierin stelt het getal in de i^e rij en de j^e kolom de kans voor dat toestand j in i overgaat.
Vervolgens probeert men $\lim\limits_{n \to \infty} M^n \bar{v}$ te berekenen, waarbij $\bar{v}$ de vektor met eerste kental 1·en overige 0 is, de vektor die beantwoordt aan de begintoestand. Nu heeft M acht eigenvektoren: $\bar{e}_1$ t/m $\bar{e}_8$, resp. met eigenwaarden $\lambda_1 = 1$, de overige λ_i, $|\lambda_i| < 1 (i = 2, 3, .., 8)$
$\bar{v}$ laat zich schrijven als: $\bar{v} = \sum\limits_{i=1}^{8} r_i \bar{e}_i$, dus

$$M^n \bar{v} = \sum_{i=1}^{8} \lambda_i^n r_i \bar{e}_i = r_1 \bar{e}_1 + \sum_{i=2}^{8} \lambda_i^n r_i \bar{e}_i, \text{ dus } \lim_{n \to \infty} M^n \bar{v} = r_1 \bar{e}_1$$

r_1 blijkt $\frac{8}{15}$ te zijn en $\bar{e}_1$ een vektor met 4^e kental 1,8^e kental 1 en overige 0. Van de vektor $r_1 \bar{e}_1$ is het 4^e kental de gevraagde kans; deze is dus gelijk aan $\frac{8}{15}$. De verwachte spelduur wordt analoog berekend. Een weergave van zo'n berekening laten we hier echter achterwege. De verwachte spelduur blijkt 8 te zijn.

Met een diagram van Engel verloopt de oplossing een stuk eenvoudiger:



Stellen we de kans dat A wint vanuit (1,0,B) p en de kans dat A wint vanuit (0,0,A) q, dan geldt:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} p = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p + \frac{1}{2}P(\text{B verliest} \mid (0, 1, \text{A})) \\ P(\text{B verliest} \mid (0, 1, \text{A})) = 1 - p \end{array}\right\} \to p = \frac{3}{5} \\ q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}P(\text{B verliest} \mid (0, 0, \text{B})) \\ P(\text{B verliest} \mid (0, 0, \text{B})) = P(\text{A verliest} \mid (0, 0, \text{A})) = 1 - q \end{array}\right\} \to q = \frac{8}{15}$$

Hiermee is de gevraagde kans gevonden.
Nu de verwachte speelduur.
Stellen we de verwachte speelduur, uitgaande van (0,0,A) en (1,0,B) resp. m_1 en m_2, dan geldt:
$m_2 = 2 \cdot \frac{1}{4} + (m_2 + 1) \cdot \frac{1}{2} + (m_2 + 2) \cdot \frac{1}{4} \to m_2 = 6$
$m_1 = \frac{1}{2}(m_2 + 1) + \frac{1}{2}(m_1 + 1)$, dus $m_1 = 8$

3.1 Hoe zit het nu met z.g. niet-absorberende Markov-processen?[3])
(Een systeem kent hier geen toestand waarin het gefixeerd blijft, als het eenmaal daarin overgaat.)
We beschouwen een systeem met drie mogelijke toestanden A, B en C.
De overgangskansen geven we via onderstaand tabelletje:

[3]) In Euclides 47 no. 7/8 wordt een voorbeeld van een niet-absorberend Markov-proces uitvoerig besproken.

	A	B	C
A	a_1	b_1	c_1
B	a_2	b_2	c_2
C	a_3	b_3	c_3

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{i=1}^{3} b_i = \sum_{i=1}^{3} c_i = 1;$$

$$0 < a_i < 1; 0 < b_i < 1 \text{ en } 0 < c_i < 1 \ (i = 1, 2, 3)$$

Hier zijn de kansen dat A in A, B en C overgaat resp. a_1, a_2 en a_3; b_i en c_i hebben analoge betekenis.
De matrix der overgangskansen is hier:

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Kiezen we als begintoestand A, dan correspondeert daarmee de vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

en de kansen op A, B en C op de (oneindig) lange duur leest men af uit de opv. kentallen van de vektor

$$\lim_{n \to \infty} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

als deze bestaat.

Als M een basis van drie onafhankelijke eigenvektoren heeft, dan hoeven we over het bestaan van deze limiet niet te twijfelen:
M heeft in ieder geval eigenwaarde 1: een bijbehorende eigenvektor noemen we $\vec{e}_1$.
Heeft M nog twee andere eigenwaarden, dan is de absolute waarde ervan kleiner dan 1, er is dan een basis van eigenvektoren en op dezelfde wijze als in 2 kan men aantonen dat

$$\lim_{n \to \infty} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r\vec{e}_1,$$ waarbij r gelijk is aan de som van de kentallen van $\bar{e}_1$.

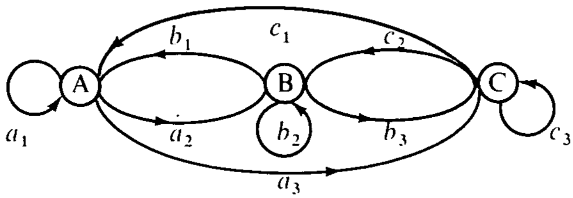
Bovendien blijkt in zo'n geval dat

$$\lim_{n \to \infty} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{n \to \infty} M^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{n \to \infty} M^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

waaruit dan volgt dat
voor het geval dat M een basis van eigenvektoren bezit, de uiteindelijke kansen eenvoudig m.b.v. een eigenvektor met eigenwaarde 1 te bepalen zijn en de uiteindelijke toestanden onafhankelijk zijn van de begintoestand.

3.2 Wat te doen echter, als in M slechts één keer de eigenwaarde 1 optreedt en geen andere? Het is niet onmogelijk dat het bijbehorende systeem naar een evenwicht tendeert, d.w.z. dat $\lim_{n \to \infty} M^n\bar{x}$ bestaat, maar op bovenstaande manier valt zoiets niet te bewijzen.

Daarom de Engel-diagrammen maar te hulp geroepen:



Stellen we de kansen om op de (oneindig) lange duur in A, B en C te verkeren, resp. p_1, p_2 en p_3 dan halen we uit dit diagram het volgende stelsel vergelijkingen:

$$p_i = a_i p_1 + b_i p_2 + c_i p_3 \quad \text{(1)}$$

Hieruit zijn de p_i's op te lossen.
Hoe zit het met de afhankelijkheid van de begintoestand?
Wel, stel de kansen om vanuit A, B en C op den lange duur in A terecht te komen gelijk aan resp. p_{11}, p_{21} en p_{31} en je kunt het volgende stel vergelijkingen uit het diagram halen:

$$\begin{cases} p_{11} = a_1 p_{11} + a_2 p_{21} + a_3 p_{31} \\ p_{21} = b_1 p_{11} + b_2 p_{21} + b_3 p_{31} \\ p_{31} = c_1 p_{11} + c_2 p_{21} + c_3 p_{31} \end{cases} \quad \text{(2)}$$

Hieruit volgt dat $p_{11} = p_{21} = p_{31}$.

Zo lijkt de conclusie, in 3.1 getrokken, te gelden voor alle niet-absorberende Markov-processen met drie toestanden.

Wat een sukses voor de diagram-methode!

3.3 Laten we echter oppassen!
Bij de opstelling van de vergelijkingen (1) en (2) hebben we stilzwijgend verondersteld dat 1[e] de kansen p_i bestaan, terwijl we daar nu juist in het geval 3.2 niet zeker van waren, en 2[e] de p_{ji}'s in het linker- en rechterlid van de vergelijkingen (2) gelijk zijn, terwijl p_{ji} na één overgang heel wat anders kan zijn dan de p_{ji} na twee overgangen.

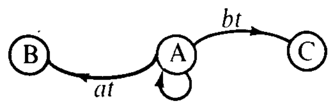
Kortom, bij toepassing van Engel-diagrammen veronachtzamen we de eventuele afhankelijkheid van de uiteindelijke toestand van de proces-duur sinds het begin.
(1) levert ons niets anders dan een eigenvektor met eigenwaarde 1 van M en (2) een eigenvektor met eigenwaarde 1 van de getransponeerde van M. Meer niet.
Een limietbeschouwing is soms nodig, zoals in het geval van 3.1 en 3.2.
Dikwijls is het evident dat de uiteindelijke toestanden niet afhankelijk zijn van de duur van het proces, zoals in 1 en 2.

3.4 Goed mis gaat het bij klakkeloze toepassing van een Engel-diagram op het – ook uit voornoemde boekje van Freudenthal ontleende – volgende voorbeeld van een absorberend Markov-proces:
'Een systeem kent 3 toestanden A, B en C en de overgangskansen worden gegeven door:

	A	B	C
A	$1-ct$	0	0
B	at	1	0
C	bt	0	1

met $c = a + b$ en $t = \frac{1}{n}$, $n =$ het aantal overgangen vanaf het begin.

Via het diagram:



vinden we voor de kansen om, uitgaande van toestand A, uiteindelijk in B en C te verkeren, resp. a/c en b/c, terwijl echter

$$\lim \mathbf{M}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-c} \\ \frac{a}{c}(1 - e^{-c}) \\ \frac{b}{c}(1 - e^{-c}) \end{pmatrix},$$ waarbij M de matrix der overgangskansen is, zodat de uiteindelijke kansen resp. gelijk zijn aan:

e^{-c}, $\frac{a}{c}(1 - e^{-c})$ en $\frac{b}{c}(1 - e^{-c})$.

4 Je moet je bij een bepaald probleem wel eens behelpen met modellen, waarvan je de betekenis niet helemaal doorziet.
Een veelzijdige benadering van zo'n probleem, waarbij diverse modellen gehanteerd worden is dan echter op z'n plaats.

Over de auteur:

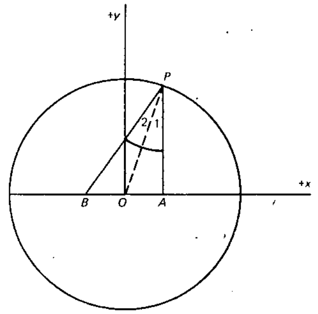
Hans Dompeling is conrector van het Murmellius gymnasium te Alkmaar, welke school in '72-'74 deelnam aan het experiment ter introduktie van de W&S in het VWO.

Nogmaals Mulder's biljartprobleem

Dr. J. T. GROENMAN

1 Bottema en Krijgsman (I) merken bij hun bespreking van een door Mulder (II) gesteld probleem op dat behandeling met isotrope coördinaten kans op succes biedt. Zij zijn zo vriendelijk mijn naam daarmee in verband te brengen. Ik wil dat beschouwen als een mij vererende uitdaging. Gebruik van isotrope coördinaten lijkt mij hier echter weinig zin te hebben omdat het met cartesische coördinaten op de volgende wijze gelukt.

2 De vraag is nu:
In hoeverre is het mogelijk bij de (op één middellijn van de cirkel O gelegen) punten A en B één of meer punten P op de cirkel te bepalen waarvoor geldt $\angle P_1 = \angle P_2$ (figuur 1)



figuur 1

Wij nemen de straal 1 en kiezen verder:
$A(a,0)$; $B(b,0)$; $P(x,y)$.
Dan valt aan te nemen $0 \leqq a \leqq 1$ en $-1 \leqq b \leqq 0$. (1)

Er geldt $\tan P_1 = \tan P_2$ en dus

$$\frac{\dfrac{y}{x-a} - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{y^2}{x(x-a)}} = \frac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x-b}}{1 + \dfrac{y^2}{x(x-b)}}$$

Deze vergelijking laat zich – als we afzien van het triviale geval $y = 0$ en in

aanmerking nemen dat geldt $x^2 + y^2 = 1$ - herleiden tot

$$\frac{a}{1 - ax} = \frac{-b}{1 - bx} \text{ of tot } a + b - 2abx = 0$$

Dus geldt: $x_P = \dfrac{a + b}{2ab}$. Bij deze x_P hoort een y_P gegeven door de betrekking

$$y_P^2 = 1 - x_P^2 = \frac{[2ab - a - b][2ab + a + b]}{4a^2b^2}$$

De voorwaarde wordt dus $y_P^2 > 0$.

Er zijn dus twee kansen, nl.

$2ab - a - b > 0 \vee 2ab + a + b > 0$ .... (2*a*)

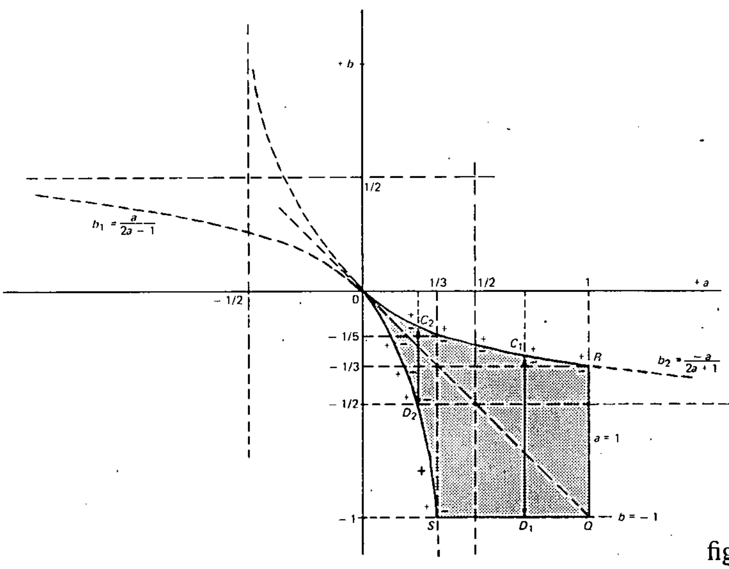
en $2ab - a - b < 0 \vee 2ab + a + b < 0$ .... (2*b*)

3 Wij beschouwen a en b als cartesische coördinaten in een plat vlak en zoeken dus naar die punten in dat vlak waarvoor geldt

$0 \leqq a \leqq 1 \vee -1 \leqq b \leqq 0 \vee 2ab - a - b > 0 \vee 2ab + a + b > 0$ (3*a*)

dan wel

$0 \leqq a \leqq 1 \vee -1 \leqq b \leqq 0 \vee 2ab - a - b < 0 \vee 2ab + a + b < 0$ (3*b*)



figuur 2

Daartoe tekenen wij (fig. 2) de lijnen $a = 1$ en $b = -1$ en verder de hyperbolen $2ab - a - b = 0$ en $2ab + a + b = 0$. De tekens bij de hyperbolen geven aan waar men voor de bijbehorende vormen de positieve (negatieve) waarden aantreft. Het is dan duidelijk dat (3*a*) geen kansen biedt maar (3*b*) wel (zie het gearceerde gebied inclusief de grenzen *QR* en *QS*).

Het gaat om de lijnstukken C_iD_i. Zonder moeite verifieren wij de resultaten van Bottema en Krijgsman.

$a = 1$	$-1 \leqq b < -\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3} < a < 1$	$-1 \leqq b < \dfrac{-a}{2a+1} < -\frac{1}{5}$
$a = \frac{1}{3}$	$-1 \leqq b < -\frac{1}{5}$
$0 < a < \frac{1}{3}$	$-1 < \dfrac{a}{2a-1} < b < \dfrac{-a}{2a+1}$
$a = 0$	$b = 0$

Literatuur:

I. O. Bottema en P. H. Krijgsman, Een probleem op het cirkelvormige biljart, Euclides **53** (1977–'78) p. 149-154.

II. H. M. Mulder, Biljarten op een rond biljart, Euclides **52** (1976–'77), p. 303-307.

Over de auteur:

J. T. Groenman legde in 1928 eindexamen hbs-b af. Hij studeerde wiskunde aan de Groningse Universiteit (doctoraal examen in 1934). Zijn promotie aan de TH te Delft volgde in 1950.
Hij was leraar aan de RHBS te Deventer van 1937 tot 1950. Daarna directeur der RHBS te Assen (1950-1956) en directeur (rector) der RHBS te Groningen (1956-1976) – later RSG Kamerlingh Onnes. Sedert 1976 geniet hij van zijn pensioen en van de wiskunde.

De zesde wiskunde olympiade in de U.S.A.

De zesde olympiade is gehouden op 3 mei 1977. Eraan vooraf ging een voorronde, de zogenaamde Annual High School Mathematics Examination, gehouden op 8 maart 1977. Hieraan namen 341000 leerlingen deel. Op grond van de resultaten behaald in de voorronde werden 107 toegelaten tot de eindronde.

Hieronder volgen de opgaven en een tabel met de behaalde scores voor de afzonderlijke vraagstukken.

1. Determine all pairs of positive integers (m, n) such that $(1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn})$ is divisible by $(1 + x + x^2 + \dots + x^m)$.

2. ABC and $A'B'C'$ are two triangles in the same plane such that the lines AA', BB', CC' are mutually parallel. If $\triangle ABC$ denotes the area of triangle ABC with an appropriate $\pm$ sign, etc., prove that $3(\triangle ABC + \triangle A'B'C') = \triangle AB'C' + \triangle BC'A' + \triangle CA'B' + \triangle A'BC + \triangle B'CA + \triangle C'AB$.

3. If a and b are two of the roots of $x^4 + x^3 - 1 = 0$, prove that ab is a root of $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0$.

4. Prove that if the opposite sides of a skew (non-planar) quadrilateral are congruent, then the line joining the midpoints of the two diagonals is perpendicular to these diagonals, and, conversely, if the line joining the midpoints of the two diagonals of a skew quadrilateral is perpendicular to these diagonals, then the opposite sides of the quadrilateral are congruent.

5. If a, b, c, d, e are positive numbers bounded by p and q, i.e., $0 < p \leqq a, b, c, d, e \leqq q$, prove that
$$(a + b + c + d + e)(1/a + 1/b + 1/c + 1/d + 1/e) \leqq 25 + 6(\sqrt{p/q} - \sqrt{q/p})^2$$
and determine when there is equality.

		Scores						
		Blank	0	1–5	6–10	11–15	16–20	21–25
Problem	1	6	26	45	5	8	17	
number	2	17	52	14	7	3	13	1
	3	16	44	19	10	7	10	1
	4	26	32	10	7	10	21	1
	5	12	24	35	18	10	7	1

De beste acht zijn uitgenodigd om deel te nemen aan de internationale olympiade. Ze zijn drie weken lang getraind in een 'training session'. Hierbij waren ook uitgenodigd zestien leerlingen met boven normale prestaties die nog niet in het laatste jaar van hun opleiding zaten. Van de acht leerlingen die aan de internationale olympiade zouden deelnemen, hadden er zes de 'training session' het jaar te voren reeds meegemaakt.
(Overgenomen uit The Mathematics Teacher, October 1977, vol. 77, nr. 7, p. 590-592.)
Op de internationale olympiade hebben de Amerikanen de eerste prijs behaald.
P. G. J. Vredenduin

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

opgaven

387. Van de rij van Fibonacci
1 1 2 3 5 8 13 21 ...
zijn de termen met rangnummer
3, 6, 9, 12, 15, ... deelbaar door 2
4, 8, 12, 16, 20, ... deelbaar door 3
5, 10, 15, 20, 25, ... deelbaar door 5
6, 12, 18, 24, 30, ... deelbaar door 8
7, 14, 21, 28, 35, ... deelbaar door 13.
Gaat dit zo door?

388. *A*, *B* en *C* hebben elk een kaartenhuis gemaakt en voor zich neergezet. Ze proberen elkaars huizen kapot te schieten. De (cyclische) volgorde waarin ze schieten, wordt door het lot bepaald. Wie aan de beurt is mag eenmaal schieten. Wiens kaartenhuis geraakt is, doet niet meer mee.
A schiet altijd raak, *B* heeft een kans van $\frac{4}{5}$ om raak te schieten en *C* een kans van $\frac{1}{2}$.
Ze kiezen alle drie een optimale strategie om hun kaartenhuis zo lang mogelijk ongerept te doen blijven. Wie heeft de grootste kans het laatst over te blijven en hoe groot is die kans?

Oplossingen.

385. De entree voor een bioscoop is 1 DM. Voor het loket staat een rij van 100 personen, waarvan 60 een 1-DM stuk bij zich hebben en 40 alleen maar een 2-DM stuk. Ieder koopt één kaartje. Bij het begin is de kas leeg. Bij hoeveel verschillende rijen verloopt de kaartverkoop zo, dat niet op een of ander moment de kassier niet kan wisselen?
Anders gezegd: op hoeveel manieren kan men in onderstaand rooster uitgaand van het punt (0, 0) het punt (60, 40) bereiken zonder de lijn *f* te passeren? Voor elk punt (behalve voor de randpunten) geldt: het aantal manieren waarop het bereikt kan worden is gelijk aan de som van de aantallen manieren waarop de twee punten bereikt kunnen worden die er direct onder en er direct links van liggen.

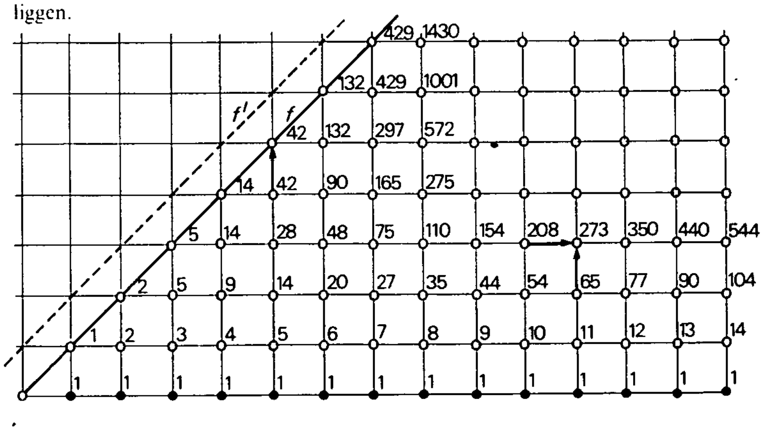


Fig. 1

Wie voldoende geduld heeft, komt er zo wel.
Kan het ook handiger? Hieronder volgt een algemene manier. We hebben gezegd, dat de lijn f niet overschreden mocht worden. We kunnen in plaats daarvan ook zeggen dat de lijn f' (de lijn $y = x + 1$) niet bereikt mag worden.
In onderstaande figuur is een weg getekend die van (0, 0) naar (m, n) loopt en met de lijn f' wel een punt gemeen heeft. Het eerste punt dat deze weg met f' gemeen heeft, is F' genoemd. Het deel van de weg van (0, 0) tot F' is gespiegeld in de lijn f'. Er ontstaat daardoor een weg die begint bij het punt $(-1, 1)$ en eindigt in (m, n).

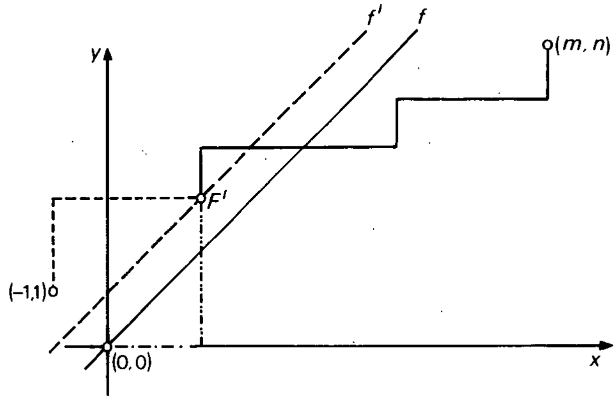


fig. 2.

Het gevraagde aantal verschillende rijen is nu:
het aantal wegen dat van (0, 0) naar (m, n) leidt, verminderd met
het aantal wegen dat van $(-1, 1)$ naar (m, n) leidt.
Deze aantallen zijn resp.

$$\binom{m+n}{m} \text{ en } \binom{m+1+n-1}{m+1}$$

Voor het aantal rijen vindt men hieruit $\frac{m-n+1}{m+1}\binom{m+n}{m}$.

386. Op een cirkel liggen $2n$ punten. Op hoeveel manieren kunnen we deze door n koorden zo verbinden, dat geen twee koorden een punt gemeen hebben?
Kies op de cirkel een punt K dat van de $2n$ punten verschilt. Doorloop te beginnen bij K de cirkel in de gekozen richting (zie figuur).

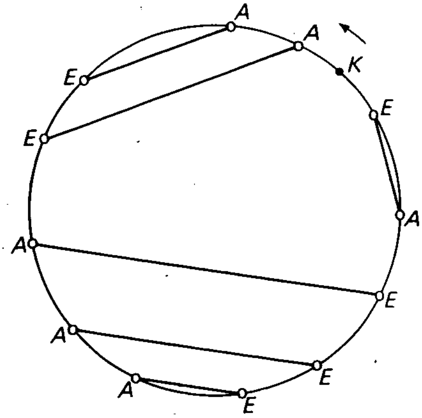


fig. 3.

Noem van elke koorde het punt waar we het eerst komen het begin (A) en dat waar we het laatst komen het einde (E). In de gekozen richting krijgen we dan een suite van n punten A en n punten E, bijv. $AAEEAAAEEEAE$.
Met deze suite correspondeert een n-tal niet snijdende koorden, als in elk beginstuk het aantal E's het aantal A's niet overtreft, en anders niet. Bij de hierboven staande suite is dit het geval.
Bij de suite $AAEAEAEEEAAE$ hoort geen stel niet snijdende koorden, omdat het eerste negental punten bestaat uit 4 A's en 5 E's.
Het probleem is hiermee teruggebracht tot het voorgaande. Het aantal oplossingen vinden we door in de daar gevonden eindformule $m = n$ te kiezen. Waardoor we vinden

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Nogmaals ad **373.** De opgaaf was: gegeven $n \in \mathbb{N}$ en de functie $f\colon k \to 3k + 1$ voor k oneven en $k \to 2k$ voor k even. Is er bij elke n een i waarvoor $f^i(n) = 1$?
De heer U. van der Hoek (Leeuwarden) heeft de computer de uitgangsgetallen 2 tot en met 10^6 laten onderzoeken. Alle gaven ten slotte 1. Het hardnekkigst was 837799, waarvoor 524 stappen nodig waren.

Boekbespreking

Robin J. Wilson, *Einführung in die Graphentheorie*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

In 1975 verscheen dit werk bij Longman Group Ltd in Londen onder de titel 'Introduction to graph theory'. In 1976 in het Duits vertaald en als no 15 verschenen van de serie 'Moderne Mathematik in elementarer Darstellung'. Deze beschrijving is volledig op dit boek van toepassing. Er wordt weinig wiskundige voorkennis aanwezig verondersteld, zodat het boek bruikbaar is voor al die categorieën, die op enigerlei wijze in hun gebied de grafentheorie gebruiken. In korte tijd krijgt men een redelijke indruk van dit gebied.
Allereerst komen enige begrippen als samenhang, bomen, cykels, Euler- en Hamiltongrafen aan bod. Daarna volgen enige beschouwingen over vlakke en planaire grafen, dualiteit, kleurproblemen en chromatische polynomen. Vervolgens gaat de schrijver in op problemen betreffende gerichte grafen en transversalen. Tot slot bespreekt hij enige aspecten van matroidtheorie. Het boek besluit met een literatuuropgave, een lijst van symbolen en een register.
De presentatie van het gebodene is uitstekend. De vele opgaven vormen een harmonisch geheel met de tekst. Dikwijls verwijst de schrijver voor een nadere explicatie/uitwerking/bewijsvoering naar een opgave. De lezer wordt op deze wijze tot zelfwerkzaamheid aangespoord.
Een boeiend boek, helder geschreven en bijzonder geschikt voor ieder die wil kennismaken met de grafentheorie.

W. Kleijne

Dietmar Waterkamp, *Lehrplanreform in der DDR*, Auswahl Reihe 9, nr 79-80, 292 blz., ingen. 16,40 DM, Hermann Schroedel Verlag, Hannover, 1975.

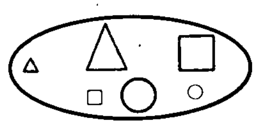
Het boekje behandelt de totstandkoming van de 'Zehnklassige allgemeinbildende polytechnische Oberschule' in de periode 1963-1972. Het informeert ons uitvoerig over de uitgangspunten, de theoretische gronden en de reorganisaties die zich in de loop der jaren sinds 1945 hebben voltrokken.
Inleidend wordt verslag uitgebracht over de maatregelen die in de periode 1945-1962 tot stand kwamen, waarbij het probleem van de inrichting van de 'Grundschule' als kern van de toekomstige eenheidsschool in het centrum van de belangstelling heeft gestaan. De hervorming van 1946 betekende een breuk zowel met het nationaal-socialistische systeem der voorafgaande

jaren als met de onderwijskundige opvattingen die in de periode van de Weimar-republiek gehuldigd waren.
Sinds 1951 kwam er een streven de 'Grundschule' uit tien in plaats van uit acht leerjaren te doen bestaan. Eerst in 1958 werd de tienklassige 'allgemeinbildende polytechnische Oberschule' wettelijk verankerd.
De leerplannen komen tot stand op grond van politieke, sociale en economische factoren. Alle doelstellingen van het onderwijs worden van staatswege vastgesteld en hebben voor alle dienaren bindende kracht. 'Kinder, Jugendliche und auch Erwachsene werden im Sinne der politischen Zielvorstellungen erzogen'. In de praktijk van het schoolleven spelen uiteraard pedagogische, methodische en didactische problemen een essentiële rol, maar steeds binnen de context van de dominerende staatsbeslissingen. De gehuldigde leerplantheorie wordt gekenmerkt door een subject-matter-oriëntatie. De didactische vrijheid van de leraar wordt in vergelijking tot de west-europese opvattingen wezenlijk ingeperkt door 'die Tatsache, dasz der Lehrplan verbindliches staatliches Dokument ist'.
De uitvoerige dokumentatie in het boekje is van betekenis voor allen die geïnteresseerd zijn in vergelijkende opvoedkunde, in het bijzonder in de problemen van vergelijkend curriculumonderzoek.

Joh. H. Wansink.

Erich Dick, Bernd Wilhelm, *Moderne wiskunde spelenderwijs*, Prisma nr 1752, 152 blz., *f* 7,50, Het Spectrum, Utrecht/Antwerpen.

Blijkens het voorwoord is het doel van dit boek, ouders van schoolgaande kinderen iets van zg. moderne wiskunde te leren en wel op een zodanige wijze, dat de lezer het gebodene leuk en niet moeilijk vindt.
De vraag: Moderne wiskunde – kinderspel? wordt bevestigend beantwoord. Bij het doorlezen blijkt, dat de schrijver slechts het oog heeft op schoolgaande 6- à 7-jarigen. De moderne wiskunde blijkt uitsluitend uit verzamelingen te bestaan en wat voor verzamelingen! Samenraapsels/samenvoegingen van bananen, appels, speelgoed e.d., waarmee zó gemanipuleerd wordt, dat na 3 blz. al geconcludeerd wordt: 'Zo wordt in deze leerfase al voorkomen dat de wiskunde in latere jaren als een nachtmerrie wordt ervaren.' Wel wat prematuur dunkt me en wat al te somber over het zg. oude wiskunde-onderwijs. Ook blijkt volgens de schrijvers dat in het algemeen in de moderne wiskunde het speelse element op de voorgrond staat (!).

Waarom wordt een figuur als  een Venn-diagram genoemd?

Het is er geen. Als men zo'n tekening wil maken, akkoord, maar noem deze dan geen Venn-diagram. Ook tegen een notatie als { ○, ◯, ▵, △, ◻, □ } heb ik bezwaar. Beide staan een juist begrip in latere ontwikkelingsfasen m.i. in de weg. Een tekening als ∅ voor de lege verzameling is duidelijk fout.
Verderop in het boek blijkt, dat de schrijvers het symbool ∅ afwisselend gebruiken voor de lege verzameling en de eigenschap leeg zijn.
Het gemanipuleer om aan te tonen, dat de lege verzameling deelverzameling is van iedere verzameling wekt de lachlust op.
Telkens vraag je je af, wat de zin is van dit alles voor kinderen en ouders. Leert iemand iets van dit alles?
Wat voor zin heeft het om ouders en kinderen iets te vertellen over de commutativiteit van de optelling, als er geen non-voorbeelden in getalverzamelingen aangereikt worden? Zó wordt moderne wiskunde inderdaad kinderspel, waarbij niemand iets leert.
Het ware beter, dat dit boek niet verschenen was. Aan verbreiding van onbegrip over (moderne) wiskunde hebben we geen behoefte.

W. Kleijne

Mededelingen

Examennummer 1978

Denkt u er nog aan uw bijdrage voor het examennummer op te sturen *vóór 15 augustus*? (zie ook blz. 417).

De redaktie

Instappen en toepassen

Onder deze titel houdt de NVvW zijn jaarlijkse themadag tezamen met de jaarvergadering. Het thema is dus *instappen en toepassen*, althans dat is de werktitel die de voorbereidingscommissie gekozen heeft.
Tijdens de voorbereiding heeft de diskussie zich vooral toegespitst op wat nu de betekenis is van voorbeelden uit het dagelijks leven of de natuurkunde of de wiskunde of noem maar op. Zijn dit situaties naar aanleiding waarvan wiskundige theorie wordt ontwikkeld of zijn dit juist situaties waarop wiskundige theorie wordt toegepast?
Het antwoord is natuurlijk: beide, maar dit is pas het begin, waar het eigenlijk omdraait is de vraag: hoe hanteer je nu dit soort situaties in de klas? Op deze vraag willen we ook op zaterdag 28 oktober ingaan.
De voorbereidingscommissie zit op dit ogenblik vooral op de instapkant van de zaak: Gaat het daar om opwarmen, motiveren? Motiveren, wat is dat nu eigenlijk?
In de organisatie van de dag is op grond van de goede ervaringen van de laatste jaren weinig veranderd. 's-Morgens zelf aktief zijn om een duidelijk zicht op het thema te krijgen. Na de lunch een lezing over een wiskundig-didaktisch onderwerp dat nauw in verband met het thema staat. Tenslotte allerlei verschillende aktiviteiten in kleine groepen zodat ieder aan zijn of haar trekken kan komen.
Vóór half elf en na vieren vindt, zoals gebruikelijk, het huishoudelijk deel van de jaarvergadering van de NVvW plaats.

De definitieve mededelingen over deze themadag komen in het eerste nummer van de volgende jaargang van Euclides.

De voorbereidingscommissie,

Joop van Dormolen, Felix Gaillard, Cees Hoogsteder, Martin Kindt, Freek Mahieu, Leo Muskens, Bert Zwaneveld.

Najaarssymposium Wiskundig Genootschap in samenwerking met de afdeling Mechanica van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs

Onderwerp: Toepassingen van de functionaalanalyse op problemen uit de mechanica.
Tijd : Vrijdag *29 september 1978*, 10.00-17.00 uur.
Plaats : Collegezaal C van het gebouw voor Werktuig- & Scheepsbouwkunde, Mekelweg 2 te Delft.

Programma

10.30 *Prof. K. Kirchgässner* met als onderwerp
'Phenomena of bifurcation in fluid dynamics'.

11.30 *Prof. H. J. Weinitschke* met als onderwerp
'Existence and bifurcation of solutions of nonlinear plate and shell problems'.
14.15 *Prof. J. A. Sparenberg* met als onderwerp
'On the existence of small amplitude optimum hydrofoil propulsion'.
15.30 *Prof. C. Baiocchi* met als onderwerp
'Variational inequalities in theoretical and numerical treatment of free boundary problems'.

Aanmelding vóór vrijdag *22 september* a.s. bij Prof. Dr. Ir. P. Meijers, Gebouw voor Werktuig- & Scheepsbouwkunde, Mekelweg 2, Delft.
Kosten van deelneming (incl. lunch en koffie) *f* 15,–, ter plaatse te voldoen.

Brief aan het Ministerie van Onderwijs verzonden op 22 mei 1978 door de vereniging

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren wil bij deze graag reageren op punt D II 7 uit de conceptcirculaire bij opgemelde brief.
De vereniging heeft vanzelfsprekend begrip voor de problemen op school, die samenhangen met afwezigheid van leraren.
Zij heeft dan ook altijd op het standpunt gestaan, dat bijeenkomsten van enkele uren (zoals besprekingen van eindexamens, begeleidingsbijeenkomsten, delen van langlopende cursussen) of van één dag (zoals jaarvergaderingen, studiedagen) buiten de lestijden gehouden moeten en kunnen worden. Het bestuur heeft bij het organiseren van bijeenkomsten steeds dienovereenkomstig gehandeld en is van plan dit te blijven doen.
Het kost echter meer moeite zonder meer mee te gaan met de suggestie, dat ook meerdaagse cursussen buiten de lestijden om gehouden moeten worden. Dit heeft niet te maken met de al dan niet aanwezige bereidheid van leraren om in vakantietijd naar een cursus te gaan, maar met de beschikbaarheid van kader voor het leiden van dergelijke cursussen.
Om dit toe te lichten moet nu eerst iets gezegd worden over de wiskundedidactiekcursussen, die sinds 1974 door de vereniging in samenwerking met het I.O.W.O. worden georganiseerd en die naar wij hopen in de toekomst georganiseerd zullen blijven, ook als de her- en bijscholing geheel in handen komt van de lerarenopleiding.
Er zijn momenteel drie soorten cursussen:
Een A-cursus over leerstofordening ten behoeve van het lesgeven en over de manier waarop doelstellingen de lespractijk kunnen en moeten beïnvloeden. Er wordt gebruik gemaakt van materiaal dat direct betrekking heeft op de klassesituatie, zoals schoolboekteksten en proefwerkvragen. Van de deelnemers wordt een voorbereiding gevraagd in de vorm van enige uren literatuurstudie.
Een B-cursus met als thema: samenwerken. Hierbij wordt geoefend met en gesproken over verschillende samenwerkingsvormen zoals die voor kunnen komen in een klas (bijvoorbeeld: een leraar met een klas, een leraar met één of enige leerlingen, kleine groepen leerlingen onderling).
Een C-cursus met als thema: oog krijgen voor en rekening houden met verschillen tussen leerlingen. Waar mogelijk wordt gewerkt met concreet materiaal en steeds zal gepoogd worden de dagelijkse schoolpractijk in het vizier te houden. Er wordt een voorbereiding gevraagd in de vorm van literatuurstudie.
Bij elk van deze cursussen is de werkwijze zodanig dat een continu samenzijn van de deelnemers in een conferentieoord onontbeerlijk is voor de effectiviteit van de leerervaring. Dit hangt samen met het goede aloude didactische principe, dat men het best leert door persoonlijke ervaring en door intensieve samenwerking.
Er wordt naar gestreefd steeds zoveel mogelijk leraren uit het voortgezet onderwijs bij de leiding van de cursussen in te schakelen.
Dit heeft twee redenen:
Ten eerste is de geloofwaardigheid van de leerstof voor de deelnemers des te groter indien zij er collega's als gespreksleider mee zien werken.
Een tweede, misschien wel veel belangrijker reden is, dat juist door optreden als kader men het gebodene beter gaat beheersen, waardoor niet alleen de didactische bekwaamheid als leraar verhoogd wordt, maar ook een sterker sneeuwbaleffect bereikt wordt.
Het probleem is nu dat het volgen van deze strategie niet mogelijk is als de cursussen geheel in de vakantie vallen, doordat het dan bijzonder moeilijk is leraren bereid te vinden als kader op te treden.

Dit is gebleken doordat enkele malen een cursus geheel in vakantietijd is georganiseerd. Het bestuur meent dat dergelijke weigeringen te billijken zijn: het leiden van een groep is een veeleisende bezigheid.
De vereniging heeft van haar kant steeds haar goede wil getoond door de cursussen op donderdag-vrijdag-zaterdag te organiseren, of aan het einde van een vakantie, waardoor in elk geval één dag in de 'eigen' tijd van de deelnemers valt. Voor een dergelijke situatie zijn steeds kaderleden te vinden. Het bestuur dringt er om bovengenoemde redenen dan ook op aan het bewuste artikel uit de circulaire met iets meer nuance te redigeren. Er zou bijvoorbeeld op gewezen kunnen worden dat het bevoegd gezag een leraar ten hoogste 4 dagen buitengewoon verlof kan verlenen naast de bekende gevallen waarin hem het buitengewoon verlof verleend moet worden.

Namens het bestuur,
drs. J. W. Maassen
secretaris.

Wetenschap en Samenleving

Het tijdschrift Wetenschap en Samenleving, een uitgave van de Bond voor Wetenschappelijke Arbeiders en het Verbond van Wetenschappelijke Onderzoekers, publiceert een dubbel-nummer onder het thema 'Inhoudelijke vernieuwing in het Voortgezet Onderwijs' (128 pag.). Het is de bedoeling van dit nummer de diskussie te stimuleren over de dringend noodzakelijke inhoudelijke vernieuwingen. Er wordt vooral aandacht aan het v.w.o. besteed.
In dit nummer o.a. een interview met staatssekretaris De Jong, een artikel van ex-minister Van Kemenade, gesprekken met leerplanontwikkelaars, een presentatie van een aantal vernieuwingsgroeperingen op het gebied van het moedertaalonderwijs, de geschiedenis, de aardrijkskunde, de natuurwetenschappen en de ekonomie. In deze bijdragen wordt vooral aandacht besteed aan de samenhang van inhoudelijke onderwijsvernieuwingen met maatschappelijke doelstellingen en politieke implikaties van het onderwijs.

Prijs van dit nummer *f* 7,50 plus *f* 1,70 verzendkosten. Over te maken op giro 22321 t.n.v. Penningmeester VWO, Postbus 165, 3600 AD Maarssen. Telefonisch te bestellen 's morgens 03465-61108.

INHOUD:

ADRESSEN AUTEURS:

J. Dompeling, Keldercroftlaan 31, 1851 VG Heiloo.

Fred Goffree, Bremlaan 16, 3735 KJ Bosch en Duin.

Dr. J. T. Groenman, Goeman Borgesiuslaan 8, 9722 RH Groningen.

Frank Laforce, Elzenhoutstraat 2, 2610 Wilrijk, België.